

Поверхность X называется гиперболической, если в любой ее точке гауссова кривизна отрицательна (равна $-1/R^2$). Гауссова кривизна — мера искривления поверхности в окрестности какой-либо её точки, равна произведению нормалей кривизны в главных направлениях. Для плоскости она равна нулю, на сфере — везде $\frac{1}{R^2}$, на торе есть точки с положительной, отрицательной и нулевой гауссовой кривизной.

Гиперболичность компактной ориентированной двумерной замкнутой поверхности обеспечивает теорема Гаусса-Бонне:

Пусть Ω — компактное двумерное ориентированное риманово многообразие с гладкой границей $\partial\Omega$. Обозначим через K гауссову кривизну Ω и через k_g геодезическую кривизну $\partial\Omega$. Тогда

$$\int_{\Omega} K d\sigma + \int_{\partial\Omega} k_g ds = 2\pi\chi(\Omega),$$

где $\chi(\Omega)$ — эйлерова характеристика Ω .

В частности, если у Ω нет границы, получаем

$$\int_{\Omega} K d\sigma = 2\pi\chi(\Omega)$$

Если поверхность деформируется, то её эйлерова характеристика не меняется, в то время как гауссова кривизна может меняться поточечно. Тем не менее, согласно формуле Гаусса-Бонне, интеграл гауссовой кривизны остаётся тот же.

Эйлерова характеристика — целочисленная характеристика топологического пространства. Эйлерова характеристика замкнутой ориентируемой поверхности связана с её родом y (числом ручек, то есть числом торов в связной сумме, представляющей эту поверхность) соотношением

$$\chi = 2 - 2y(n) = 2 - (n - 4) * 2^{n-2} - 2 = (4 - n) * 2^{n-2}$$

Среди компактных поверхностей гиперболическими являются в точности те, которые имеют отрицательную Эйлерову характеристику, т.е. $y > 1$. Т.о., гиперболическими являются все компактные поверхности, за исключением семи следующих: сфера, диск, кольцо, тор, лента Мебиуса, проективная плоскость, бутылка Клейна.